

Boiciuc Zanfira

**Exerciții și probleme de
matematică pe înțelesul tuturor**



Ciocănești 2021

Exerciții și probleme de matematică pe înțelesul tuturor

Autorul lucrării: Boiciuc Zanfirica

Tehnoredactare computerizată: Boiciuc Zanfirica

Coperta lucrării: Boiciuc Gabriel

Cuprins

Probleme rezolvate de geometrie	4-19
Descompunerea în produs de factori a unei expresii algebrice	20
Obiective, Cuvinte cheie.....	21
Factorul comun.....	22
Exerciții rezolvate.....	23
Exerciții propuse.....	24
Formule de calcul prescurtat	25
Exerciții rezolvate $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	25
Exerciții rezolvate $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	25
Exerciții rezolvate $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$	26
Exerciții propuse.....	26
Descompunerea în factori.....	27
Descompunerea în factori folosind factorul comun	28
Descompunerea în factori folosind formulele de calcul prescurtat	28
Descompunerea în factori folosind gruparea termenilor	29
Descompunerea în factori folosind metode combinate	30
Exerciții propuse	31
Exerciții pentru fixarea cunoștințelor	31
Exerciții pentru aprofundarea cunoștințelor	31
Test	32
Bibliografie.....	33

Probleme rezolvate de geometrie

Problema nr. 1

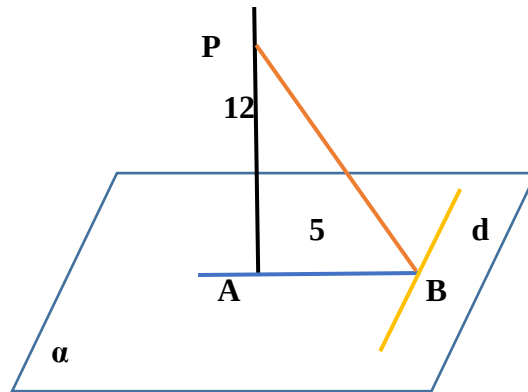
Dacă punctele A, B, C și D, au proprietatea că oricare trei din ele sunt coliniare, atunci punctele A, B, C, D sunt coliniare.

Rezolvare:

$$\left. \begin{array}{l} A, B, C \text{ coliniare} \Rightarrow A, B, C \in d \\ B, C, D \text{ coliniare} \Rightarrow B, C, D \in d \\ A, C, D \text{ coliniare} \Rightarrow A, C, D \in d \end{array} \right| \Rightarrow A, B, C, D \in d \Rightarrow A, B, C, D \text{ coliniare}$$

Problema nr. 2

Fie A un punct din planul α și $PA \perp \alpha, P \notin \alpha$ și $PA = 12, d \in \alpha$ și $AB \perp d, AB = 5$ Calculați distanța de la P la dreapta d.

Rezolvare:

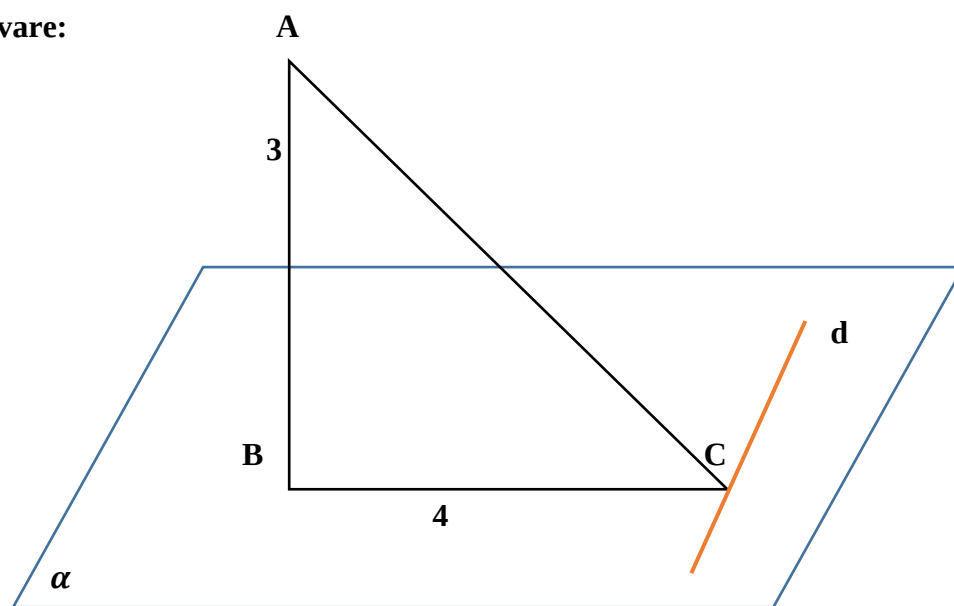
$$\left. \begin{array}{l} PA \perp \alpha \\ AB \perp d \\ AB, d \subset \alpha \end{array} \right| \xRightarrow{th.3\perp} PB \perp d \Rightarrow d(P, d) = PB$$

$$\left. \begin{array}{l} \Delta PAB: m(\sphericalangle PAB) = 90^\circ \\ PA = 12, AB = 5 \end{array} \right| \xRightarrow{th.Pitagora} PB^2 = PA^2 + AB^2 \\ PB^2 = 169 \Rightarrow PB = 14 \Rightarrow d(P, d) = 14$$

Problema nr. 3

Fie triunghiul ABC dreptunghic în B și catetele $AB = 3, BC = 4$ astfel ca $BC \subset \alpha, d \subset \alpha$ și $d \perp (ABC)$. Atunci, se cere distanța de la A la dreapta d și distanța de la A la planul α

Rezolvare:



$$\left. \begin{array}{l} d \perp (ABC) \\ BC, AC \subset (ABC) \end{array} \right| \Rightarrow d \perp BC, d \perp AC$$

$$\text{Deci } d(A, d) = AC$$

$$\Delta ABC: AB = 3, BC = 4 \xrightarrow{\text{th. Pitagora}} AC^2 = AB^2 + BC^2$$

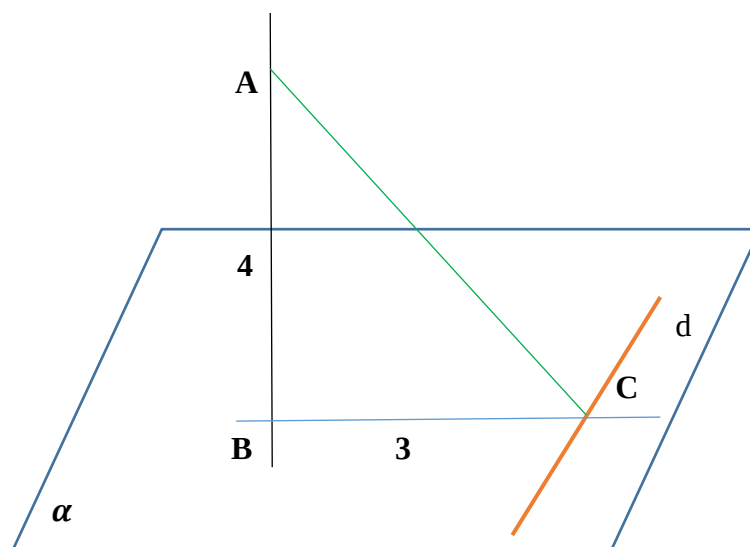
$$AC^2 = 25 \Rightarrow AC = 5 \Rightarrow d(A, d) = 5$$

$$d(A, \alpha) = AB = 3$$

Problema nr. 4

Fie $AB \perp \alpha$ și $BC \perp d$, unde $d \subset \alpha, C \in d, B \in \alpha, A \notin \alpha$. Dacă $AB = 4$, $BC = 3$, calculați distanța de la A la dreapta d.

Rezolvare:



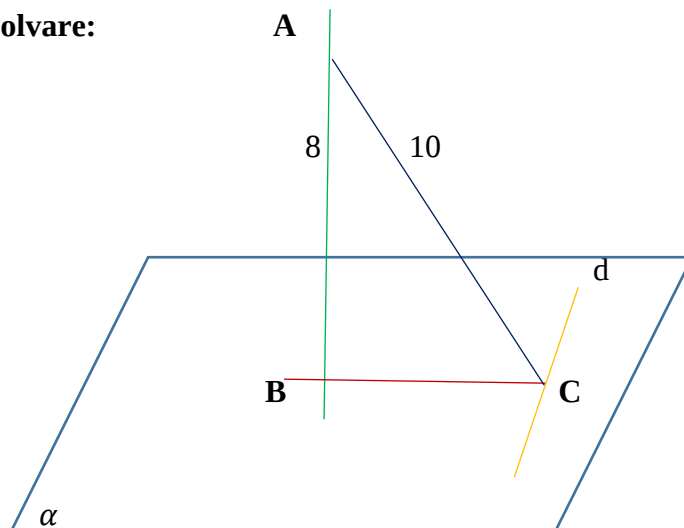
Vom aplica teorema celor trei perpendiculare.

$AB \perp \alpha$		$\xRightarrow{th.3\perp} AC \perp d \Rightarrow d(A, d) = AC$
$BC \perp d$		
$BC, d \subset \alpha, BC \cap d = \{C\}$		
$\Delta ABC: m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ$		$\xRightarrow{th.Pitagora} AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AC^2 = 25 \Rightarrow AC = 5$
$AB = 4$		
$BC = 3$		
		deci $d(A, d) = 5$

Problema nr. 5

Fie $AB \perp \alpha$ și $BC \perp d$, unde $d \subset \alpha, C \in d, B \in \alpha, A \notin \alpha$. Dacă $AB = 8$, $AC = 10$, calculați BC și distanța de la A la dreapta d .

Rezolvare:



Cum $AB \perp \alpha$ și $BC \subset \alpha \Rightarrow AB \perp BC \Rightarrow$ *triunghiul ABC dreptunghic în B*

$\Delta ABC: m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ$		$\xRightarrow{th.Pitagora} AC^2 = AB^2 + BC^2$
$AB = 8$		
$AC = 10$		
		$100 = 64 + BC^2$
		$BC = 6$

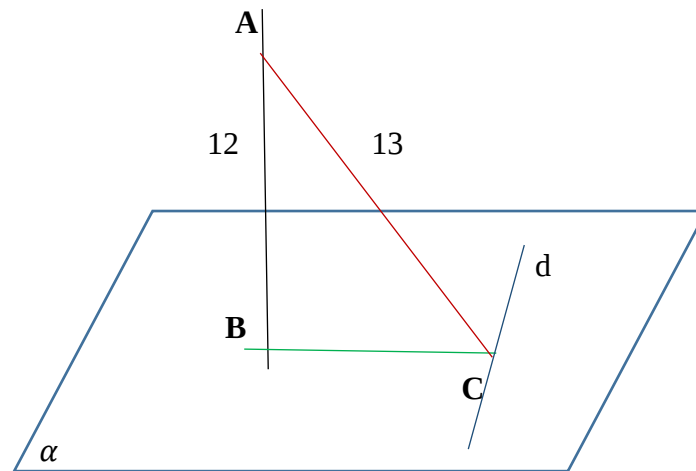
Pentru a determina distanța de la A la dreapta d , utilizăm teorema celor trei perpendiculare.

$AB \perp \alpha$		$\xRightarrow{th.3\perp} AC \perp d \Rightarrow d(A, d) = AC = 10$
$BC \perp d$		
$BC, d \subset \alpha, BC \cap d = \{C\}$		

Problema nr. 6

Fie $AB \perp \alpha$ și $BC \perp d$, unde $d \subset \alpha, C \in d, B \in \alpha, A \notin \alpha$. Dacă distanța de la A la d este 13 și distanța de la A la planul α este 12 unități, calculați distanța de la B la d.

Rezolvare:



Mai întâi vom identifica distanța de la punctul A la dreapta d, folosind teorema celor trei perpendiculare.

$$AB \perp \alpha$$

$$BC \perp d$$

$$BC, d \subset \alpha, BC \cap d = \{C\}$$

$$\xRightarrow{th.3\perp} AC \perp d \Rightarrow d(A, d) = AC = 13$$

$$AB \perp \alpha \Rightarrow d(A, \alpha) = AB = 12$$

$$BC \perp d \Rightarrow d(B, d) = BC$$

$$\triangle ABC: m(\sphericalangle ABC) = 90^\circ$$

$$AB = 12$$

$$AC = 13$$

$$\xRightarrow{th.Pitagora} AC^2 = AB^2 + BC^2$$

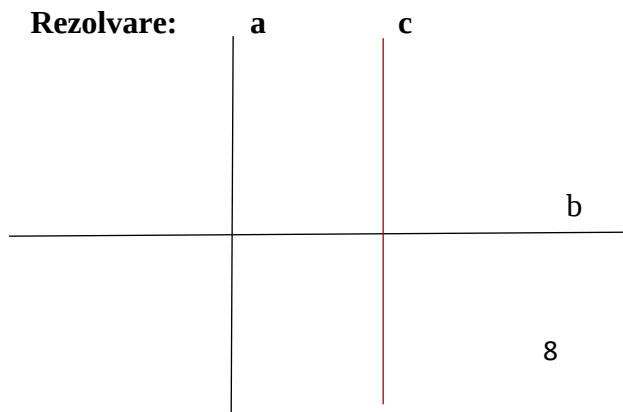
$$169 = 144 + BC^2$$

$$BC = 5 \Rightarrow d(B, d) = 5$$

Problema nr. 7

Dacă două drepte din spațiu sunt perpendiculare, atunci una dintre ele e perpendiculară pe orice paralelă la cealaltă.

Rezolvare:



Fie dreapta c paralelă cu dreapta $a \Rightarrow a \cap c = \emptyset$

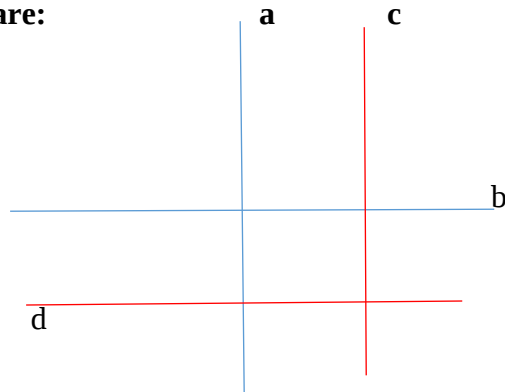
Presupunem că dreapta b nu este perpendiculară pe dreapta $c \Rightarrow b \cap c \neq \emptyset \Rightarrow b \parallel c$

$b \parallel c$ și $c \parallel a \Rightarrow b \parallel a \Rightarrow \text{contradicție} \Rightarrow \text{presupunerea este falsă} \Rightarrow b \perp c$

Problema nr. 8

Două drepte paralele cu două drepte perpendiculare sunt automat perpendiculare.

Rezolvare:



Știm că: $a \perp b$ și $c \parallel a, d \parallel b$

Vom folosi enunțul problemei nr. 7

$a \perp b, c \parallel a \Rightarrow b \perp c$

$b \perp c$ și $b \parallel d \Rightarrow d \perp c$

Problema nr. 9

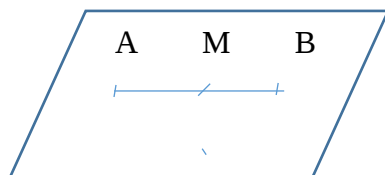
Orice plan care conține mijlocul unui segment este automat egal depărtat de capetele segmentului.

Rezolvare:

$$M \text{ mijlocul } (AB) \Rightarrow M \in (AB) \mid \Rightarrow (AB) \subset \alpha$$

$$M \in \alpha$$

deci automat va fi egal depărtat de capetele segmentului



α

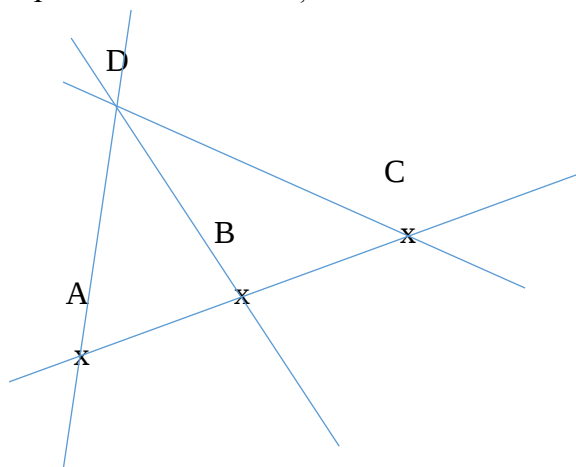
Problema nr. 10

Se dau patru puncte, oricare trei coliniare; să se scrie numărul de drepte care să treacă prin cel puțin două dintre ele.

Rezolvare:

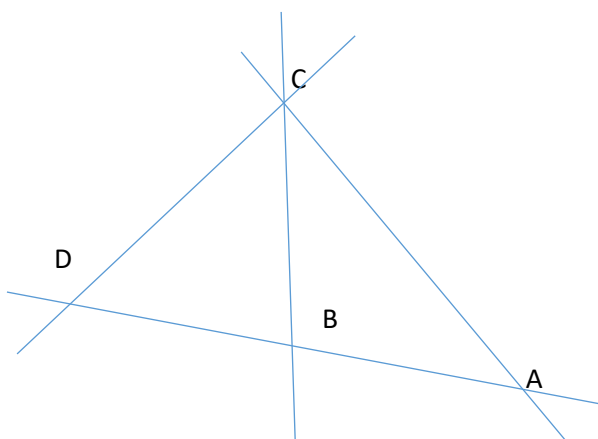
Considerăm urătoarele situații:

- a) Fie punctele A, B, C, D și A, B, C coliniare



avem 3 drepte care să treacă prin cel puțin două dintre ele

- b) Fie punctele A, B, C, D și A, B, D coliniare. În această situație vom avea tot 3 drepte care să treacă prin cel puțin două dintre ele.



- c) Fie punctele A, B, C, D și B, D, C coliniare. În această situație vom avea tot 3 drepte care să treacă prin cel puțin două dintre ele.
 d) Fie punctele A, B, C, D și A, C, D coliniare. În această situație vom avea tot 3 drepte care să treacă prin cel puțin două dintre ele.

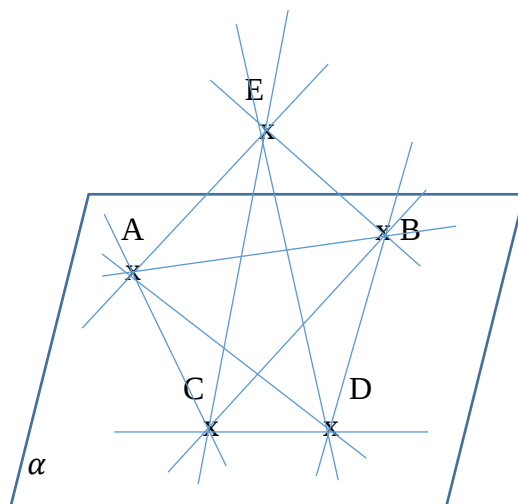
În concluzie: numărul de drepte care trec prin cel puțin două puncte dintre ele este egal cu 12.

Problema nr. 11

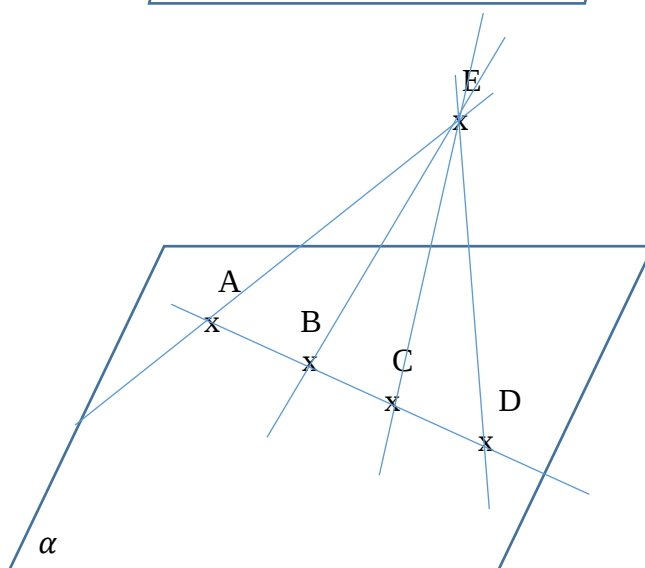
Se dau patru puncte distincte aflate într-un plan și în afara lui un alt punct. Să se scrie numărul minim și maxim de drepte care să treacă prin cel puțin două dintre ele.

Rezolvare:

10 drepte



5 drepte



Problema nr. 12

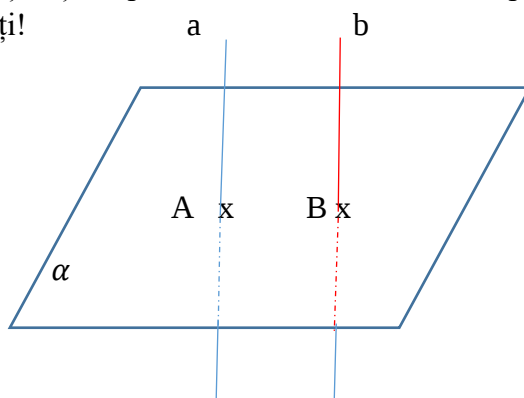
Care este numărul minim și maxim de drepte care pot trece prin câte două puncte, știind că avem n puncte situate într-un plan și în afara lui încă un punct.

Răspuns: $n + 1, \frac{n(n+1)}{2}$

Problema nr. 13

Fie două drepte paralele a și b și un plan α care intersectează dreapta a . Ce poziție are dreapta b față de planul α ? Justificați!

Rezolvare:



$$\begin{array}{l|l} \alpha \text{ intersectează dreapta } a \Rightarrow \alpha \cap a = \{A\} \\ a \parallel b \end{array} \quad \Rightarrow b \text{ înțeapă planul } \alpha \text{ în punctul } B$$

Dacă dreapta b nu înțeapă planul α , atunci b inclusă în planul α sau b este paralelă cu planul α .

Dacă dreapta b este inclusă în plan, atunci dreptele a și b nu sunt paralele, ceea ce intră în contradicție cu datele problemei.

Dacă dreapta b este paralelă cu planul, atunci dreptele a și b nu sunt paralele, ceea ce intră în contradicție cu datele problemei.

Problema nr. 14

Demonstrați că dacă d și g sunt două drepte necoplanare, atunci există un plan și numai unul care să conțină pe d și să fie paralel cu dreapta g .

Rezolvare:

Dreptele d și g necoplanare $\Rightarrow d \subset \alpha$ și $g \subset \beta$

Presupunem că dreapta d este inclusă în planele α și γ a.î. $\alpha \parallel g$ și $\beta \parallel g$ imposibil $\Rightarrow$ contradicție, deci presupunerea este falsă.

Problema 15

Stabiliți valoarea de adevăr a afirmației: $a \parallel \alpha, b \subset \alpha \Rightarrow a \parallel b$ fals

Problema 16

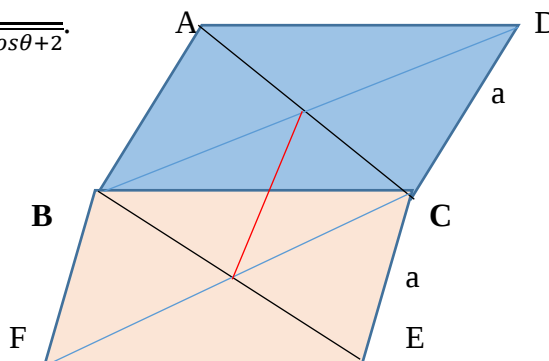
Stabiliți valoarea de adevăr a afirmației: $a \parallel \alpha, \alpha \parallel \beta \Rightarrow a \subset \beta$ adevărat

Problema 17

Stabiliți valoarea de adevăr a afirmației: $d \parallel \alpha, d \parallel \beta \Rightarrow \alpha \parallel \beta$ adevărat fals

Problema 18

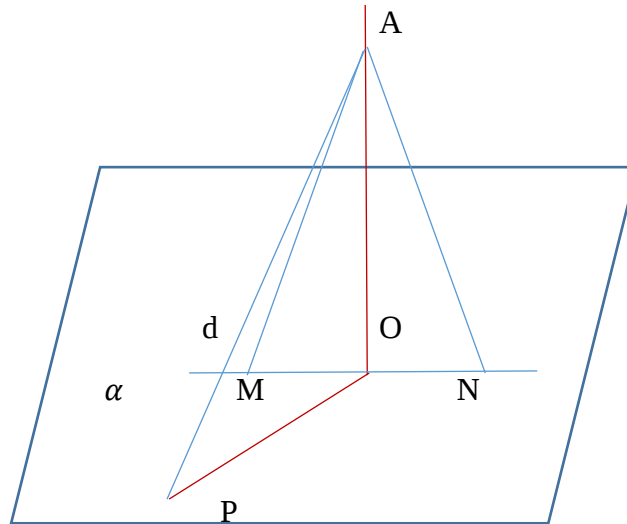
Se consideră pătratele ABCD și BCEF situate în plane care formează un unghi diedru cu măsura $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$. Dacă a este lungimea laturilor pătratelor, demonstrați că distanța dintre dreptele AC și BE este: $\frac{a \sin \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + 2 \cos \theta + 2}}$.



Problema nr. 19

Fie $AO \perp \alpha, O \in \alpha$. Dacă pe o dreaptă $d \subset \alpha$, se iau punctele M, N astfel ca $\sphericalangle AMO \equiv \sphericalangle ANO$, atunci, măsura unghiului diedru $(\alpha, (AMN))$ este mai mare decât $m(\sphericalangle AMO)$.

Rezolvare:



$AO \perp \alpha$ și $d \subset \alpha, OP \subset \alpha \Rightarrow AO \perp d$ și $AO \perp OP$

$\Delta AOM: m(\sphericalangle AOM) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AMO) < 90^\circ$

$(AMN) \cap \alpha = d$

$AO \perp d, OP \perp d$

$AO \subset (ANM), OP \subset \alpha$

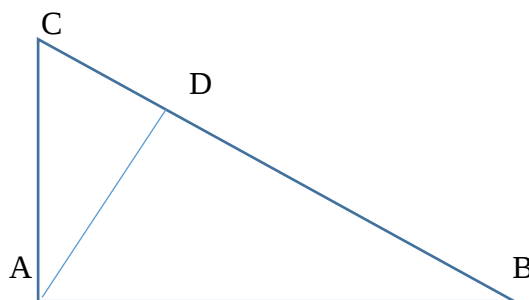
$\Rightarrow m(\sphericalangle((AMN), \alpha)) = m(\sphericalangle AOP) = 90^\circ > m(\sphericalangle AMO)$

Problema nr. 20

Fie triunghiul ABC, cu unghiul drept în A. Fie $AD \perp BC$. Atunci, demonstrați că:

a) $AD \cdot BC = AB \cdot AC$, b) $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

Rezolvare:



$$A_{ABC} = \frac{lh}{2} = \frac{AD \cdot BC}{2} \text{ și } A_{ABC} = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{AB \cdot AC}{2} \Rightarrow AD \cdot BC = AB \cdot AC$$

$$\Delta ABC: \text{teorema catetei} \Rightarrow AB^2 = BD \cdot BC \text{ și } AC^2 = CD \cdot BC$$

$$\text{teorema înălțimii} \Rightarrow AD^2 = DB \cdot DC$$

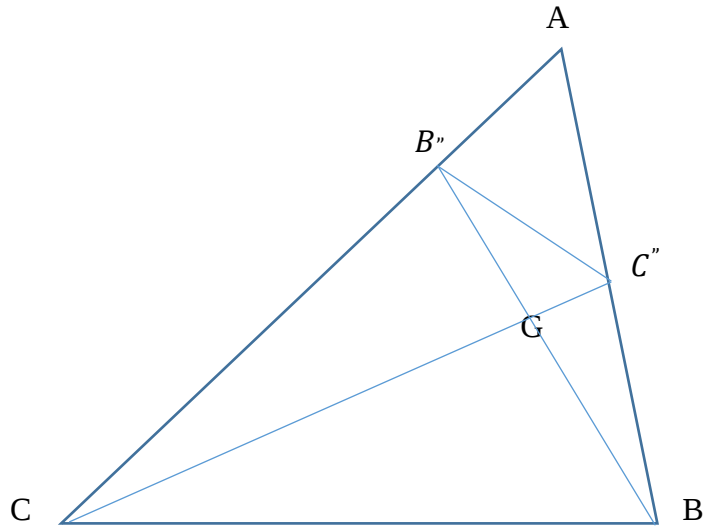
$$\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{BD \cdot BC} + \frac{1}{CD \cdot BC} = \frac{1}{BC} \left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{CD} \right) = \frac{1}{BC} \cdot \frac{BD + DB}{BD \cdot CD} = \frac{1}{BC} \cdot \frac{BC}{AD^2} = \frac{1}{AD^2}$$

Problema nr. 21

Fie triunghiul ABC oarecare, iar medianele vârfurilor B și C perpendiculare. Demonstrați că:

$$5BC^2 = AB^2 + AC^2.$$

Rezolvare:



$$\Delta: CGB \xrightarrow{\text{th.Pitagora}} CB^2 = CG^2 + BG^2$$

$$\Delta CGB'' \xrightarrow{\text{Th.Pitagora}} CB''^2 = CG^2 + GB''^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = \frac{AC^2}{4}$$

$$\Delta BGC'' \xrightarrow{\text{Th.Pitagora}} BC''^2 = GC''^2 + GB''^2 = \frac{AB^2}{4}$$

$$\Delta C''GB'' \xrightarrow{\text{Th.Pitagora}} C''B''^2 = C''G^2 + GB''^2 = \frac{BC^2}{4}$$

$$(+) \quad CB^2 + \frac{AC^2}{4} + \frac{AB^2}{4} + \frac{BC^2}{4} = CG^2 + BG^2 + CG^2 + GB''^2 + GC''^2 + GB''^2 + C''G^2 + GB''^2$$

$$GC^2 + GB^2 + GC''^2 + GB''^2 = BC + \frac{BC^2}{2}$$

$$GC^2 + GB^2 + GC'^2 + GB'^2 = \frac{AB^2}{4} + \frac{AC^2}{4}$$

Din relațiile de mai sus rezultă: $5BC^2 = AB^2 + AC^2$

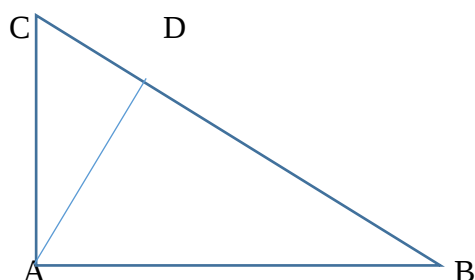
Problema nr. 22

Demonstrați reciproca teoremei înălțimii.

Rezolvare:

Teorema înălțimii: într-un triunghi dreptunghic pătratul lungimii înălțimii este egal cu produsul proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

Reciproca teoremei înălțimii: dacă într-un triunghi pătratul lungimii înălțimii corespunzătoare unei laturi este egal cu produsul proiecțiilor celorlalte laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.



Fie triunghiul ABC, $AD \perp BC$ și $(BD), (CD)$ proiecțiile laturilor (AB) și (AC) pe latura (BC) .

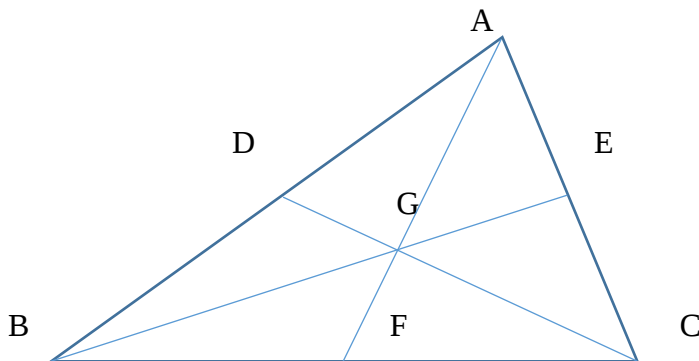
$$AD^2 = BD \cdot CD \Rightarrow AD \cdot AD = BD \cdot CD \Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow \triangle CAD \sim \triangle BDA \Rightarrow$$

$$\sphericalangle ACD \equiv \sphericalangle BAD$$

$$m(\sphericalangle ACD) + m(\sphericalangle CAD) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle CAD) + m(\sphericalangle BAD) = 90^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle CAB) = 90^\circ \\ \Rightarrow \text{triunghiul ABC este dreptunghic în A.}$$

Problema nr. 23

Demonstrați că în orice triunghi ABC, cu medianele m_a, m_b, m_c , corespunzătoare laturilor BC, AC, AB, are loc: $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$.

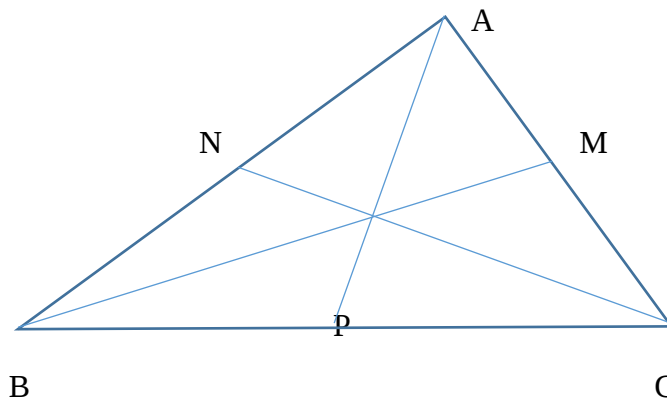


Rezolvare:

$$\begin{aligned}
 m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 &= \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} + \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} + \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \\
 &= \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) \\
 &= \frac{1}{4}(3a^2 + 3b^2 + 3c^2) = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)
 \end{aligned}$$

Problema nr. 24

În triunghiul dreptunghic ABC, demonstrați că are loc: $m_b^2 + m_c^2 = \frac{5a^2}{4}$.



Rezolvare:

Conform relației de la problema precedentă $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$, rezultă:

$$m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - m_a^2$$

Cum triunghiul ABC este dreptunghic și (AP) mediana corespunzătoare ipotenuzei, rezultă că:

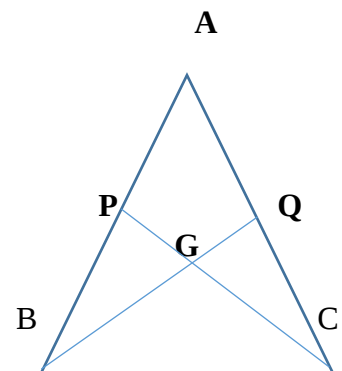
$$AP = \frac{BC}{2} \Rightarrow m_a = \frac{a}{2}$$

$$m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2 + 3a^2}{4} = \frac{5a^2}{4}$$

Problema nr. 25

Demonstrați că triunghiul cu două mediane congruente, este isoscel.

Rezolvare:



$$\begin{array}{l|l} \text{Fie } G = (CP) \cap (BQ) \Rightarrow GQ = \frac{1}{3}BQ \text{ și } BG = \frac{2}{3}BQ \\ GP = \frac{1}{3}CP \text{ și } CG = \frac{2}{3}CP \\ CP = BQ \end{array} \quad \left| \quad \Rightarrow GP = GQ \text{ și } GB = GC \right.$$

Din congruența triunghiurilor PGB și QGC conform cazului LUL, rezultă $PB = QC$

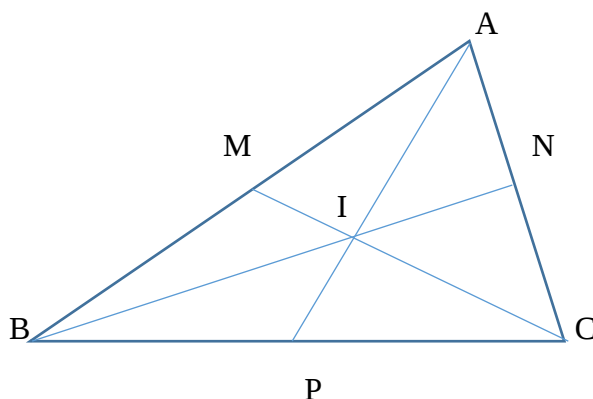
Din congruența triunghiurilor BPC și CQB conform cazului LLL, rezultă $\sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle QCB$

În triunghiul ABC avem $\sphericalangle PBC \equiv \sphericalangle QCB \Rightarrow \Delta ABC$ isoscel

Problema nr. 26

Demonstrați că bisectoarele unui triunghi sunt concurente.

Rezolvare:



Aplicând teorema bisectoarei exterioare, obținem: $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$

$$\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CB} \quad \Rightarrow \quad \frac{PB}{PC} \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NA}{NC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{CA}{CB} \cdot \frac{BC}{AB}$$

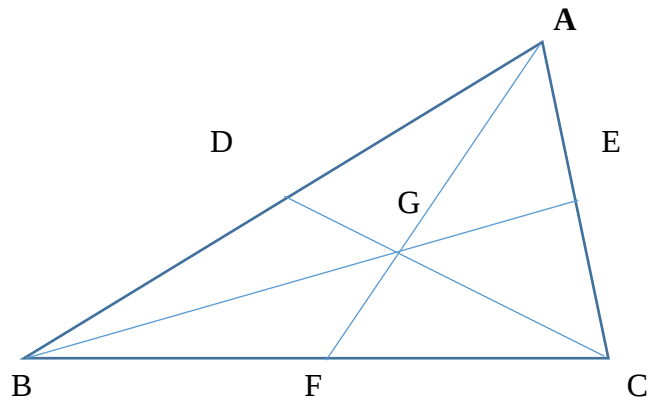
$$\frac{NA}{NC} = \frac{BC}{AB}$$

Deci: $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{MA}{MB} \cdot \frac{NA}{NC} = 1$ și conform reciproci teoremei lui CEVA, rezultă că bisectoarele unui triunghi sunt concurente.

Problema nr. 27

Demonstrați că medianele unui triunghi sunt concurente.

Rezolvare:



În triunghiul ABC: (AF) mediană $\Rightarrow F$ mijlocul (BC) $\Rightarrow \frac{BF}{FC} = 1$

(BE) mediană $\Rightarrow E$ mijlocul (AC) $\Rightarrow \frac{EC}{EA} = 1$

(CD) mediană $\Rightarrow D$ mijlocul (AB) $\Rightarrow \frac{DA}{DB} = 1$

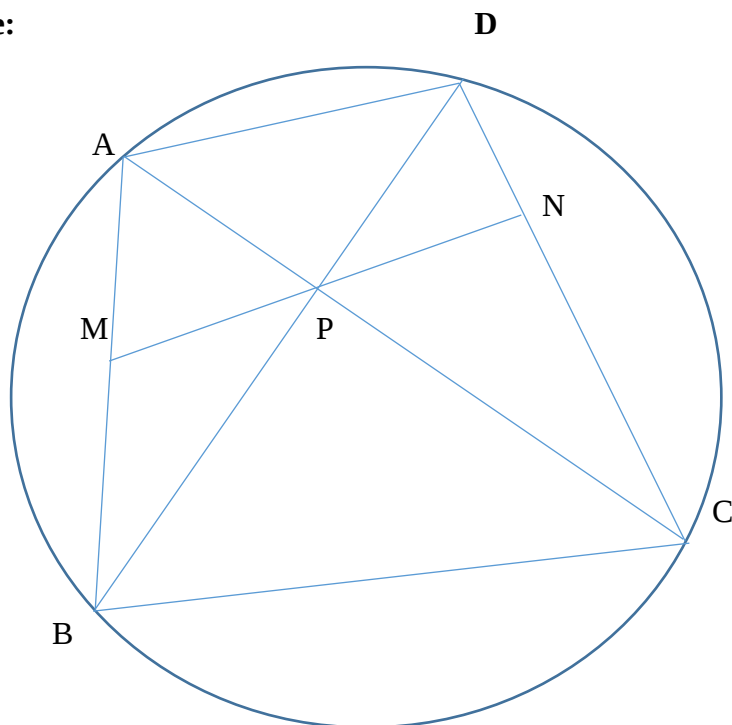
($\cdot$)

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{DA}{DB} = 1 \xrightarrow{\text{reciproca th.Ceva}} AF \cap CD \cap BE = G$$

Problema nr. 28

Un patrulater inscriptibil are diagonalele perpendiculare. Să se arate că perpendiculara dusă din punctul de intersecție al diagonalelor pe una din laturi trece prin mijlocul laturii opuse.

Rezolvare:



$$\sphericalangle MPB \equiv \sphericalangle DPN$$

$$\sphericalangle MBP = \widehat{AD} \text{ și } \sphericalangle ACD = \widehat{AD} \Rightarrow \sphericalangle MBP \equiv \sphericalangle ACD \text{ (PCD)}$$

$$\sphericalangle PCD = 90^0 - \sphericalangle PDC = 90^0 - (180^0 - 90^0 - \sphericalangle DPN) = 90^0 - 180^0 + 90^0 + \sphericalangle DPN$$

$$\sphericalangle PCD \equiv \sphericalangle DPN \text{ și } \sphericalangle PCD \equiv \sphericalangle PBA \Rightarrow \sphericalangle DPN \equiv \sphericalangle PBA \text{ și } \sphericalangle DPN \equiv \sphericalangle MPB \Rightarrow$$

$$\sphericalangle MPB \equiv \sphericalangle MBP \Rightarrow MB = MP \text{ și cum triunghiul } APB \text{ este dreptunghic}$$

$$\Rightarrow (PM) \text{ mediană} \Rightarrow M \text{ mijlocul } (AB)$$

Descompunerea în produs de factori a unei expresii algebrice



Obiective

Elevul trebuie:

- să cunoască formulele de calcul prescurtat
- să aplice formulele de calcul prescurtat
- să dea factorul comun într-o expresie algebrică
- să cunoască metodele de descompunere în factori a unei expresii algebrice
- să aplice metodele de descompunere în factori a unei expresii algebrice



Cuvinte cheie

- Formule
- Calcul
- Descompunere
- Factor
- Metode
- Expresie



Factorul comun

Ne reamintim!

Distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Scoaterea factorului comun este strâns legată de distributivitatea înmulțirii față de adunare și scădere. Proprietatea distributivității o vom folosi de la dreapta spre stânga pentru a scoate factorul comun.

$$a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c)$$

$$a \cdot b - a \cdot c = a \cdot (b - c)$$

Exemplu: $2021 \cdot 2 + 2021 \cdot 8 = 2021 \cdot (2 + 8) = 2021 \cdot 10 = 20210$

$124 \cdot 12 - 124 \cdot 11 = 124 \cdot (12 - 11) = 124 \cdot 1 = 124$

Factorul comun poate fi: un număr, un număr reprezentat printr-o literă, un produs dintre doi factori dintre care unul este numeric, o putere, un produs de puteri, o sumă sau o diferență de numere reprezentate prin litere

Observație:

Exerciții rezolvate

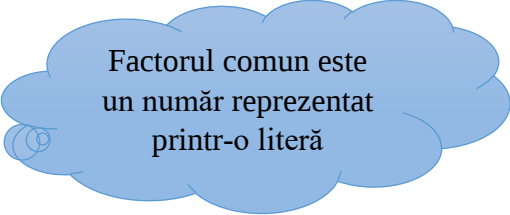
Scoateți factorul comun:



Factorul comun
este un număr

$$25 \cdot 3 + 25 \cdot 6 - 25 \cdot 4 = 25 \cdot (3 + 6 - 4) = 25 \cdot 5 = 125$$

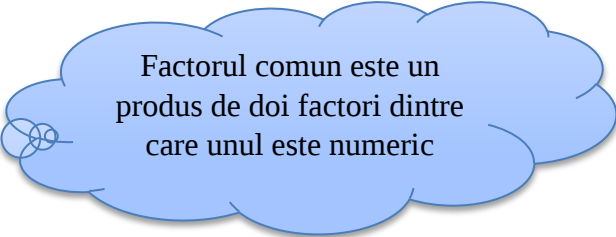
$$12 \cdot 104 - 10 \cdot 104 + 104 = 104 \cdot (12 - 10 + 1) = 104 \cdot 3 = 312$$



Factorul comun este
un număr reprezentat
printr-o literă

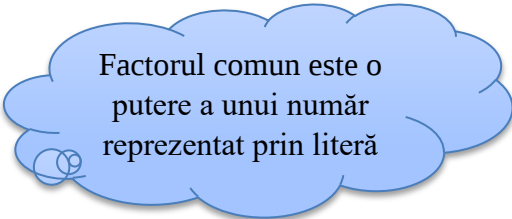
$$2a - a + \sqrt{2}a = a \cdot (2 - 1 + \sqrt{2}) = a \cdot (1 + \sqrt{2})$$

$$2x - 8x - x + 3x = x \cdot (2 - 8 - 1 + 3) = -4x$$



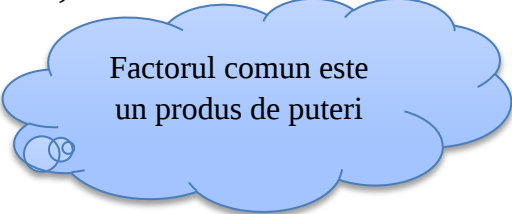
Factorul comun este un
produs de doi factori dintre
care unul este numeric

$$6ab + 12a - 4ac = 2a \cdot (3b + 6 - 2c)$$



Factorul comun este o
putere a unui număr
reprezentat prin literă

$$2a^2 + a^3 - a = a \cdot (2a + a^2 - 1)$$



Factorul comun este
un produs de puteri

$$x^3y^2 + 2x^2y^3 - \sqrt{2}x^3y^3 = x^2y^2(x + 2y + xy)$$

Factorul comun este o sumă sau o diferență de numere reprezentate prin litere

$$\begin{aligned}
 (y - z) - 0,2(y - z) + \frac{1}{2}(y - z) &= (y - z)(1 - 0,2 + 0,5) \\
 &= 1,3 \cdot (y - z)(x + y) \cdot \sqrt{2} + 3\sqrt{2} \cdot (y + x) - 2\sqrt{2} \cdot (x + y) \\
 &= (x + y) \cdot (\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cdot (x + y)
 \end{aligned}$$

Exerciții propuse

Scoateți factorul comun:

$$2021 \cdot 13 - 2021 \cdot 12 + 2021$$

$$3a + 2a - 4a$$

$$7x^2 - x^2 - 3x^2 + 2x^2$$

$$4ab + 8ab - 12ab$$

$$0,5x^2y - 1,2xy^2 + xy$$

$$\frac{1}{2}a^4 - \frac{3}{4}a^2 + \frac{2}{3}a^3$$

$$\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$

$$\sqrt{12}ab - \sqrt{27}a^2b + 4\sqrt{3}ab^2$$

$$2(x - 2) + 3(x - 2) - 6(x - 2)$$

$$0, (3)(2a - 1) - 1, (3)(2a - 1) + 1, 0(3)(2a - 1)$$

$$10x(x + 1) + 5(1 + x) - 8x(x + 1) - 2x(1 + x)$$

$$9a(a + b) - 3a^2(b + a) - 2a^3(a + b) + (a + b)$$

$$(2 + \sqrt{7})(a - \sqrt{7})^2 - (\sqrt{7} + 2)^2(a - \sqrt{7})$$

$$16y^n - 24y^{n+1} - 18y^{n+1} + 12y^{n+2}$$



Formule de calcul prescurtat

Ne reamintim!

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

Exerciții rezolvate $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Calculați:

$$(x + 3)^2 = x^2 + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$$

$$(2x + 5)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 5 + 5^2 = 4x^2 + 20x + 25$$

$$(3x + 2y)^2 = (3x)^2 + 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$$

$$(a^2 + 3b)^2 = (a^2)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot 3b + (3b)^2 = a^4 + 6a^2b + 9b^2$$

$$(a^2b + b^3)^2 = (a^2b)^2 + 2 \cdot a^2b \cdot b^3 + (b^3)^2 = a^4b^2 + 2a^2b^4 + b^6$$

$$(\sqrt{2} + 1)^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 1 + 1^2 = 2 + 2\sqrt{2} + 1 = 3 + 2\sqrt{2}$$

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{6} + 2 = 5 + 2\sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} (\sqrt{12} + \sqrt{24})^2 &= (2\sqrt{3} + 2\sqrt{6})^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} + (2\sqrt{6})^2 = 12 + 8\sqrt{18} + 24 \\ &= 36 + 8 \cdot 3\sqrt{2} = 36 + 24\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{1}{2} + a\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a + a^2 = \frac{1}{4} + a + a^2$$

$$\begin{aligned} \left(2\frac{1}{2}x + 1,5y\right)^2 &= \left(\frac{5}{2}x\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x \cdot 1,5y + (1,5y)^2 = \frac{25}{4}x^2 + 7,5xy + 2,25y^2 \\ &= 6,25x^2 + 7,5xy + 2,25y^2 \end{aligned}$$

Exerciții rezolvate $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Calculați:

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$(3 - 2x)^2 = 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2x + (2x)^2 = 9 - 12x + 4x^2$$

$$(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 2y + (2y)^2 = 9x^2 - 12xy + 4y^2$$

$$(-x + y)^2 = (y - x)^2 = y^2 - 2xy + x^2$$

$$(2a^2 - b^2)^2 = (2a^2)^2 - 2 \cdot 2a^2 \cdot b^2 + (b^2)^2 = 4a^4 - 4a^2b^2 + b^4$$

$$(4a^3b^2 - b^3)^2 = (4a^3b^2)^2 - 2 \cdot 4a^3b^2 \cdot b^3 + (b^3)^2 = 16a^6b^4 - 8a^3b^5 + b^6$$

$$(\sqrt{5} - 5)^2 = (\sqrt{5})^2 - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot 5 + 5^2 = 5 - 10\sqrt{5} + 25 = 30 - 10\sqrt{5}$$

$$(\sqrt{6} - \sqrt{7})^2 = (\sqrt{6})^2 - 2 \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 = 6 - 2\sqrt{42} + 7 = 13 - 2\sqrt{42}$$

$$\begin{aligned} (-\sqrt{20} + \sqrt{32})^2 &= (\sqrt{32} - \sqrt{20})^2 = (4\sqrt{2} - 2\sqrt{5})^2 = (4\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5} + (2\sqrt{5})^2 \\ &= 32 - 16\sqrt{10} + 20 = 42 - 16\sqrt{10} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{3}{2}x - 2y\right)^2 = \left(\frac{3}{2}x\right)^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}x \cdot 2y + (2y)^2 = \frac{9}{4}x^2 - 6xy + 4y^2$$

Exerciții rezolvate $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Calculați:

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$$

$$(5 - x)(x + 5) = (5 - x)(5 + x) = 25 - x^2$$

$$(2x + y)(2x - y) = 4x^2 - y^2$$

$$(\sqrt{3} + 1)(1 - \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3}) = 1 - 3 = -2$$

$$(\sqrt{25} - \sqrt{12})(\sqrt{25} - \sqrt{12}) = 25 - 12 = 13$$

$$(\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(\sqrt{2} + 2\sqrt{3}) = 2 - 12 = -10$$

$$\left(3x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + 3x\right) = \left(3x - \frac{1}{2}\right)\left(3x + \frac{1}{2}\right) = 9x^2 - \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\sqrt{\sqrt{5}} - \sqrt{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{5}} + \sqrt{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{\sqrt{7} + \sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sqrt{7} - \sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{7} + \sqrt{3})(\sqrt{7} - \sqrt{3})} = \sqrt{7 - 3} = \sqrt{4} = 2$$

Exerciții propuse

Calculați:

$$(u + v)^2; (b - c)^2; (t - v)(t + v); (3 + a)^2; (2 - y)^2; (5 - x)(x + 5);$$

$$(\sqrt{2} + y)^2; (4x - \sqrt{2})^2; (\sqrt{13} - \sqrt{5})(\sqrt{5} + \sqrt{13}); \left(\frac{5}{2}a - b\right)^2; \left(\frac{x}{5} + \frac{1}{2}\right)^2; (3 + \sqrt{2})(\sqrt{2} - 3)$$

$$(1,3x^2 + 1,4y^2)^2; \left(-2\frac{1}{2}t + 0, (3)v\right)^2; (5\sqrt{3} - 7\sqrt{2})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3}); \sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} - 1)^2;$$

$$\sqrt{2} \cdot (5 - \sqrt{2})^2; \left(3 + \sqrt{1 + \sqrt{2}}\right)^2; \left(1 - \sqrt{3 + \sqrt{5}}\right)^2; \left(2 + \sqrt{3 + \sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{3 + \sqrt{2}} - 2\right)$$

Descompunerea în factori



Ne reamintim!

O sumă algebrică este o sumă de forma:

$$a + (+b) + (-c) + (-d) + (+e) + (-f)$$

unde a, b, c, d, e și f sunt numere reale.

A descompune o sumă algebrică în factori, înseamnă a scrie suma algebrică sub formă de produs.

Metode de descompunere în factori:

- Metoda factorului comun
- Utilizarea formulelor de calcul prescurtat
- Gruparea termenilor
- Metode combinate

Observație:

Descompunerea în factori folosind factorul comun

Exerciții rezolvate

Să se descompună:

$$8a + 8b - 8c = 8(a + b - c)$$

$$9x - 24y + 12z - 6 = 3(3x - 8y + 4z - 2)$$

$$a^3b^2c + a^2bc^2 - a^2bc = a^2bc(ab + c - 1)$$

$$3xy^3 - 12x^2y^2 + 9xy = 3xy(y^2 - 4xy + 3)$$

$$\sqrt{12}a^2 + \sqrt{27}a^3 - \sqrt{75}a^4 = 2\sqrt{3}a^2 + 3\sqrt{3}a^3 - 5\sqrt{3}a^4 = \sqrt{3}a^2(2 + 3a - 5a^2)$$

$$(x - 1) + 3(x - 1) - 12(x - 1) = (x - 1)(1 + 3 - 12) = -8(x - 1)$$

$$(2x + 1)^3 - (x - 1)(2x + 1)^2 = (2x + 1)^2(2x + 1 - x + 1) = (2x + 1)^2(x + 2)$$

Descompunerea în factori folosind formulele de calcul prescurtat



Ne reamintim!

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Exerciții rezolvate

Restrângeți ca pătrat:

$$x^2 + 16x + 64 = (x + 8)^2$$

$$9x^2 + 6x + 1 = (3x + 1)^2$$

$$2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = (\sqrt{2}x + 1)^2$$

$$x^2 + x + \frac{1}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$5 + 2\sqrt{6} = 2 + 3 + 2\sqrt{6} = (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{6} + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$$

$$y^2 - 10y + 25 = (y - 5)^2$$

$$16y^2 - 8y + 1 = (4y - 1)^2$$

$$5y^2 - 4\sqrt{5}y + 4 = (\sqrt{5}y - 2)^2$$

$$y^2 - y + \frac{1}{4} = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$7 - 4\sqrt{3} = 3 + 4 - 4\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 - 4\sqrt{3} + 2^2 = (\sqrt{3} - 2)^2$$

Descompuneți:

$$x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$$

$$9x^2 - 4 = (3x - 2)(3x + 2)$$

$$25y^2 - 0,16z^2 = (5y - 0,4z)(5y + 0,4z)$$

$$81a^2 - \frac{25}{9} = \left(9a - \frac{5}{3}\right)\left(9a + \frac{5}{3}\right)$$

$$3a^4 - 16b^2 = (\sqrt{3}a^2)^2 - 16b^2 = (\sqrt{3}a^2 - 4b)(\sqrt{3}a^2 + 4b)$$

$$36 - (x - 1)^2 = (6 - x + 1)(6 + x - 1) = (7 - x)(5 + x)$$

$$5 - (y + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{5})^2 - (y + \sqrt{5})^2 = (\sqrt{5} - y - \sqrt{5})(\sqrt{5} + y + \sqrt{5}) = -y(y + 2\sqrt{5})$$

$$(x + 2)^2 - (x + 5)^2 = (x + 2 - x - 5)(x + 2 + x + 5) = -3(2x + 7)$$

$$(2x - 1)^2 - (x + 3)^2 = (2x - 1 - x - 3)(2x - 1 + x + 3) = (x - 4)(x + 2)$$

$$\begin{aligned} 9(x + 3)^2 - 25(x - 5)^2 &= [3(x + 3)]^2 - [5(x - 5)]^2 \\ &= [3(x + 3) - 5(x - 5)][3(x + 3) + 5(x - 5)] \\ &= (3x + 9 - 5x + 25)(3x + 9 + 5x - 25) \\ &= (-2x + 34)(8x - 16) \\ &= 16(-x + 17)(x - 2) \end{aligned}$$

$$a^4 - 81 = (a^2)^2 - 9^2 = (a^2 - 9)(a^2 + 9) = (a - 3)(a + 3)(a^2 + 9)$$

Descompunerea în factori folosind gruparea termenilor



Gruparea termenilor este o metodă, care împreună cu celelalte metode, conduce la descompuneri.

Exerciții rezolvate

Descompuneți grupând favorabil:

$$\begin{aligned} 5x^3 - 5x^2 + 3x - 3 &= (5x^3 - 5x^2) + (3x - 3) \\ &= 5x^2(x - 1) + 3(x - 1) \\ &= (x - 1)(5x^2 + 3) \end{aligned}$$



Am grupat primii doi termeni și ultimii doi termeni.

Putem grupa și astfel: primul termen cu al treilea termen și al doilea termen cu ultimul termen. Atenție la semnul pe care îl punem în fața ultimei grupări, având în vedere că cei doi termeni au semnul minus.

$$\begin{aligned} \text{Vom obține: } 5x^3 - 5x^2 + 3x - 3 &= (5x^3 + 3x) - (5x^2 + 3) = x(5x^2 + 3) - (5x^2 + 3) = \\ &= (5x^2 + 3)(x - 1) = (x - 1)(5x^2 + 3) \end{aligned}$$



Indiferent de gruparea convenabilă a termenilor obținem același rezultat.

$$\begin{aligned} \sqrt{3}a^2b - \sqrt{2}ab^2 + \sqrt{3}a - \sqrt{2}b &= (\sqrt{3}a^2b + \sqrt{3}a) - (\sqrt{2}ab^2 + \sqrt{2}b) \\ &= \sqrt{3}a(ab + 1) - \sqrt{2}b(ab + 1) \\ &= (ab + 1)(\sqrt{3}a - \sqrt{2}b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3y^4 + 3x^3y^4 + 5x^3y + y^3 + 3y + 5 &= (x^3y^4 + y^3) + (3x^3y^4 + 3y) + (5x^3y + 5) \\ &= y^3(x^3y + 1) + 3y(x^3y + 1) + 5(x^3y + 1) \\ &= (x^3y + 1)(y^3 + 3y + 5) \end{aligned}$$

Descompunerea în factori folosind metode combinate



La descompunerea în factori putem folosi și metode combinate. Sunt situații când este necesar să completăm cu un termen astfel încât să avem dezvoltarea unei sume sau a unei diferențe.

Exerciții rezolvate

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= x^2 - 4x + 4 - 1 = (x^2 - 1) - (4x - 4) = (x - 1)(x + 1) - 4(x - 1) = \\ &= (x - 1)(x + 1 - 4) = (x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

Pentru a grupa termenii l-am scris pe 3 ca $4 - 1$. Acest fapt ne-a permis să grupăm termenii astfel: primul cu ultimul și al doilea cu al treilea. Din nou atenție deosebită la semnul stabilit din fața ultimei grupări.

$$\begin{aligned} x^4 - 8x^2 + 4 &= x^4 - 2 \cdot 4 \cdot x^2 + 16 - 12 = (x^4 - 2 \cdot 4 \cdot x^2 + 16) - 12 = (x^2 - 4)^2 - 12 \\ &= (x^2 - 4 - \sqrt{12})(x^2 - 4 + \sqrt{12}) = (x^2 - 4 - 2\sqrt{3})(x^2 - 4 + \sqrt{12}) \end{aligned}$$

Pentru a grupa termenii l-am scris pe 4 ca $16 - 12$, ca să obținem pătratul unei diferențe, apoi să aplicăm diferența pătratelor.

$$\begin{aligned} (x + y)(1 - xy) + (x - y)(1 + xy) &= x(1 - xy) + y(1 - xy) + x(1 + xy) - y(1 + xy) \\ &= x(1 - xy + 1 + xy) + y(1 - xy - 1 - xy) \\ &= 2x - 2xy^2 \end{aligned}$$

$$= 2x(1 - y^2)$$

$$= 2x(1 - y)(1 + y)$$

Exerciții propuse

Exerciții pentru fixarea cunoștințelor

Descompuneți în produs următoarele expresii:

$$3x + 3; a^2 + a; 2 - 2y; 11x - 11y; 15a + 5b - 25; 2x^2 - 8x + 12x^3; 2(a - 1) - 7a(a - 1)$$

$$x^2 - 1; 4x^2 - 9; 0,04 - x^2; 25a^2 - \frac{1}{4}b^2; a^4 - y^8; 50 - y^2; 16a^2 - 0,01b^2; 64x^2 - 3,61$$

$$ab + b + a + 1; 3x - 3y + x^2 - xy; 7x^3 + 7x^2 - 4y - 4; x^5 - 5x + x^4 - 5;$$

$$a^4 - a^2 + 2a - 2$$

Exerciții pentru aprofundarea cunoștințelor

Descompuneți în produs următoarele expresii:

$$x^3 - x; 2x^2 - 50; (7x - 3)(7x - 2)^2 - (7x - 2)^3 + (7x - 3); \sqrt{75}x(x + 1) - \sqrt{12}(x + 1)^2$$

$$\frac{49}{121}x^2 - \frac{26}{144}y^2; 16 - (x + 4)^2; 9(x - 1)^2 - (3x - 2)^2; (a^2 + a + 1)^2 - (-a^2 + a - 1)^2$$

$$y^2 + 4y + 3; y^2 + 6y + 8; y^2 + 8y + 7; y^2 - 3y - 18; -y^2 - 4y + 12; x^2 + 3x + 2$$

$$(a^2 - a)(a^2 - a - 22) + 40; 16x^2 - 8x - 63; 4x^2 + 4x - 3; a^4 + a^4b^4 - 1 - b^4$$

Test



Timpul efectiv de lucru este de 50 de minute

Toate subiectele sunt obligatorii

Se acordă 10 puncte din oficiu

Subiectul I Completați spațiile punctate

40 de puncte

5p 1. Valoarea de adevăr a propoziției $(a - b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ este ...

5p 2. Descompunerea în factori a expresiei $4x^2 - 1$ este...

5p 3. Termenul care lipsește din expresia $2y^2 + \sqrt{2}y + \dots$, pentru a obține pătratul unei sume de

doi termeni este ...

5p 4. Valoarea minimă a expresiei $x^2 - 6x + 9$ este ...

5p 5. Rezultatul calculului $(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2$ este ...

5p 6. Forma restrânsă a expresiei $a^2 + a + \frac{1}{4}$ este...

5p 7. Descompunerea în factori a expresiei $(y - 1)^2 - 1$ este ...

5p 8. Forma restrânsă a expresiei $3b^2 - 2\sqrt{6}b + 2$ este ...

Subiectul al II-lea Scrieți rezolvările complete

50 de puncte

Descompuneți în factori:

10p 1. $9(x + 1)^2 - 4(x - 2)^2$

10p 2. $(x - 2)^4 - (x - 2)^2 - 2$

15p 3. $x^4 - 8x^2 + 4$

15p 4. $(x^2 + 6x + 5)(x^2 + 6x + 7) + 1$

Bibliografie:

Pișcoran Laurențiu, Complemente de geometrie, Editura Risoprint, 2015